Aclaración importante: Este manual se ofrece sin ningún tipo de garantía. El autor no se hace responsable del uso que se pueda dar al contenido. Las opiniones expresadas aquí son puramente subjetivas y buscan contribuir al proceso explicativo únicamente.

Sobre el autor:

Camilo Bernal.

Estudiante de ingeniería industrial en Bogotá, Colombia. Gran interés por el software libre y la ingeniería. Febrero de 2012. Los comentarios pueden ser dirigidos al correo: mercbascamilo27@yahoo.es

CONJUNTO DE PROBLEMAS 17.1-A

1. Suponga que al analizar más el restaurante McBurger se obtienen los resultados adicionales siguientes.

Cantidad de Cajeros	1	2	3	4	5	6	7
Inactividad (%)	0	8	12	18	29	36	42

a.) ¿Cuál es la eficiencia de la operación, expresada como porcentaje del tiempo en que los empleados están ocupados, cuando la cantidad de cajeros es de 5?
b.) El gerente desea mantener el tiempo promedio de espera en unos 3 minutos y, al mismo tiempo, mantener la eficiencia de la instalación aproximadamente en 90%. ¿ Se pueden alcanzar estas metas? Explique por qué.

SOLUCIÓN

a.) Eficiencia=100%-21%=79%

b.) Para un tiempo promedio de espera<=3 minutos, son necesarios al menos 5 cajeros.

Para una eficiencia>=90%, el porcentaje de ociosidad asociado es <=10%. El número de cajeros correspondiente es máximo 2.

CONCLUSION:

Las dos condiciones no se pueden satisfacer simultáneamente. Al menos una de las dos condiciones ha de ser relajada.

2. Acme Metal Jobshop va a comprar un taladro vertical de usos múltiples. Hay dos modelos disponibles, A y B, con costos de operación de $18 y $25 por hora, respectivamente. El modelo A es más lento que el modelo B. El análisis de colas de máquinas parecidas indica que cuando se usa A, la cantidad promedio de trabajos en espera es 4, 30% mayor que el tamaño de la cola en B. Un trabajo demorado representa una utilidad perdida, que Acme estima ser de $10 por trabajo en espera y por hora. ¿Cuál modelo debe comprar Acme?

SOLUCIÓN

C-A = $18 por hora
C-B = $25 por hora
Longitud de la cola A = 4 Trabajos
Longitud de la cola B =0.7*4=2,8 Trabajos
Costo de A=$18+4*$10=$58 por hora
Costo de B=$25+2,8*$10=$53 por hora

DECISIÓN: Seleccionar el modelo B.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 17.2-A

1. Identifique al cliente y al servidor en cada uno de los siguientes casos:
a.) Aviones que llegan a un aeropuerto.
b.) Base de taxis donde estos esperan a que lleguen pasajeros.

c.) Verificación de las herramientas en un almacén de un taller de maquinado.
d.) Cartas procesadas en una oficina de correo.
e.) Inscripción a las clases en una universidad.
f.) Juicios en la corte.
g.) Funcionamiento de las cajas de un supermercado.
h.) Funcionamiento de un estacionamiento.

SOLUCIÓN

LITERAL	CLIENTE	SERVIDOR
a.)	Avión	Pista de aterrizaje
b.)	Pasajero	Taxi
c.)	Maquinista	Empleado que proporciona las herramientas
d.)	Carta	Buzón
e.)	Estudiante	Oficina de registro
f.)	Casos	Juez
g.)	Cliente	Cajero
h.)	Carro	Espacio de estacionamiento

2. Para cada uno de los casos del problema 1, identifique lo siguiente: a) Naturaleza de la fuente (finita o infinita), b) La naturaleza de los clientes que llegan (individualmente o en grupo), c) Clase de tiempo entre llegadas (deterministicas o probabilisticas), d) Definición y clase de tiempo de servicio, e) Capacidad de la cola (finita o infinita) y f) Disciplina de la cola.

SOLUCIÓN

LITERAL	**FUENTE**	**NATURALEZA CLIENTES**	**CLASE DE T. ENTRE LLEGADAS**	**DEF. Y CLASE T. DE SERVICIO**	**CAPACIDAD DE LA COLA**	**DISCIPLINA DE LA COLA**
a.)	INF	Individual	Probabilistico	Tiempo para despejar la pista	INF	FIFO
b.)	INF	Individual	Probabilistico	Tiempo carrera	INF	FIFO
c.)	INF	Individual	Probabilistico	Tiempo recibir herramienta	INF	FIFO
d.)	INF	Grupo	Deterministico	Tiempo procesar carta	INF	ALEATORIO
e.)	INF	Individual	Probabilistico	Tiempo procesar registro	INF	FIFO
f.)	INF	Individual	Probabilistico	Tiempo	INF	FIFO

				Pruebas y verdicto		
g.)	INF	Individual	Probabilistico	Tiempo atender cliente	INF	FIFO
h.)	INF	Individual	Probabilistico	Tiempo parquear	0	NINGUNA

3. Estudie el sistema siguiente e identifique las situaciones correspondientes de espera. Para cada situación defina los clientes, el ó los servidores, la disciplina de la cola, el tiempo de servicio, la longitud máxima de la cola y la fuente de los clientes.
Las órdenes de trabajo se reciben en un taller para su procesamiento. Al recibirlas, el supervisor decide si el trabajo es normal o urgente. Algunas órdenes requieren usar una ó varias máquinas idénticas. Las mismas órdenes se procesan en una línea de producción en dos etapas, y hay dos de ellas disponibles. En cada uno de los dos grupos, se asigna una instalación para manejar los trabajos urgentes.
Los trabajos que llegan a una instalación se procesan en el orden de llegada. Los trabajos terminados se embarcan al llegar, en una zona de embarque con capacidad limitada.
Las herramientas afiladas para las distintas máquinas son suministradas en un almacén central de herramientas. Cuando una máquina se descompone se manda a un reparador, de un grupo de servicio, para arreglarla. Las máquinas que trabajan en pedidos urgentes siempre reciben prioridad tanto en la adquisición de herramientas nuevas del almacén, como en recibir reparaciones.

4. ¿cierto o falso?
a.) Un cliente impaciente puede optar por desistir (irse).
b.) Si se prevé un largo tiempo de espera, un cliente que llega puede optar por rehusar.
c.) El cambio de una linea de espera a otra se hace para reducir el tiempo de espera.

SOLUCIÓN

a.) Cierto
b.) Cierto
c.) Cierto

CONJUNTO DE PROBLEMAS 17.3A

1. a.) Explique lo que entiende de la relación entre la frecuencia de llegadas λ y el tiempo promedio entre llegadas.

   b.) En cada uno de los casos siguientes, determine la frecuencia promedio de llegadas por hora, λ , y el tiempo promedio entre llegadas, en horas.
   i) Una llegada cada 10 minutos.
   ii) Dos llegadas cada 6 minutos.
   iii) La cantidad de llegadas en un período de 30 minutos es 10.
   iv) El intervalo promedio entre las llegadas sucesivas es 0.5 hora.

   c.) En cada uno de los casos siguientes, determine la frecuencia promedio de servicio por hora, μ y el tiempo promedio de servicio en horas.
   i) Se termina un servicio cada 12 minutos.
   ii) Hay dos salidas cada 15 minutos.

iii) La cantidad de clientes atendidos en un período de 30 minutos es de 5.
iv) El tiempo promedio de servicio es de 0.3 hora

SOLUCIÓN

a.) Tiempo promedio entre arribos (en unidades de tiempo)

= 1/(Tasa de arribo λ [En Clientes/Unidad de tiempo])

b.) Teniendo I=Tiempo promedio entre arribos

i) λ=60/10=6 Arribos/hora
I=10 minutos=1/6 hora
ii) λ=60/3=20 Arribos/hora
I=6/2=3 minutos= 1/20 hora
iii) λ=10/30*60=20 Arribos/hora
I=30/10=3 minutos=1/20 hora
iv) λ=1/0.5=2 Arribos/hora
I=0.5 horas

c.) Teniendo S=Tiempo promedio de servicio

i) μ=60/12=5 Servicios/hora
S=12 Minutos=0.2 Horas
ii) μ=60/7.5=8 Servicios/hora
S=7.5 Minutos=0.125 Horas
iii) μ=5/30*60=10 Servicios/hora
S=30/5=6Minutos=1/10 hora
iv) μ=1/0.3=3.33 Servicios/hora
S=0.3 Horas

2. En el ejemplo 17.3-1, determine lo siguiente:
a.) La cantidad promedio de fallas en una semana, suponiendo que el servicio se ofrece 24 horas por día y 7 días por semana.
b.) La probabilidad de que haya al menos una falla en un período de 2 horas.
c.) La probabilidad de que la próxima falla no suceda en menos de 3 horas.
d.) Si no ha sucedido falla 3 horas después de la última falla, ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo entre fallas sea de 4 horas cuando mucho?

SOLUCIÓN

a.) λ(h)=0.2 fallas/hora
λ (semana)=0.2*24*7=33.6 fallas/semana
b.) P{al menos una falla en 2 horas}
=P{Tiempo entre fallas<=2}
=P{t<=2}=1-exp(-0.2*2)=0.33 (aprox.)
c.) P{t>3 horas}=1-P{t<=3 horas}=exp(-0.2*3)=0.55 (aprox.)
d.) P{t<=1 hora}=1-exp(-0.1*1)=0.18

3. El tiempo entre llegadas en una dependencia de la State Revenue Office es exponencial, con valor medio 0.05 hora. La oficina abre a las 8 A.M.
a.) Escriba la distribución exponencial que describa el tiempo entre llegadas.
b.) Determine la probabilidad de que no lleguen clientes a la oficina hasta las 08:15 A.M.
c.) Son las 08:35 A.M. El último cliente entró a las 08:26. ¿Cuál es la probabilidad de que el siguiente cliente llegue antes de las 08:38 A.M.? ¿Y de que no llegue hasta las 08:40 A.M.?

d.) ¿Cuál es la cantidad promedio de clientes que llegan entre las 08:10 y las 08:45 A.M.?

SOLUCIÓN

λ=1/0.05=20 Arribos/hora

a.) $f(t)=\lambda \exp(-\lambda t)=20\exp(-20t)$, $t>0$
b.) P{t>15/60}=P{t>0.25}=exp(-20*0.25)=0.00614
c.) P{t<3/60}=P{t<0.05}=1-exp(-20*0.05)=0.632
d.) P{t>5/60}=exp(-20*5/60)=0.189
t=45-10=35 minutos
Número promedio de arribos en 35 minutos=20*35/60=11.67 arribos

4. Suponga que el tiempo entre descomposturas de una máquina es exponencial, con promedio de 6 horas. Si la máquina ha trabajado sin fallar durante las últimas 3 horas, ¿Cuál es la probabilidad de que continúe si fallar durante la próxima hora? ¿De que se descomponga durante la próxima media hora?

SOLUCIÓN

λ=1/6 Arribos/hora
P{t>=1}=exp(-1/6*1)=0.846
P{t<0.5}=1-exp(-1/6*0.5)=1-exp(-1/12)=0.08

5. El tiempo entre llegadas a una sala de juego en la sociedad de alumnos es exponencial, con una media de 10 minutos.
a.) ¿Cuál es la frecuencia de llegadas por hora?
b.) ¿Cuál es la probabilidad de que no lleguen alumnos a esa sala durante los 15 minutos sigueintes?
c.) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos un alumno visite la sala de juegos durante los próximos 20 minutos?

SOLUCIÓN

a.) λ=60/10=6 Arribos/hora
b.) P{t>15/60}=exp(-6*15/60)=0.223
c.) P{t<20/60}=1-exp(-6*20/60)=0.865

6. El gerente de un nuevo restaurante de comida rápida desea cuantificar el proceso de llegadas de clientes, estimando la fracción de intervalos de tiempo entre llegadas que sea a.) menos que 2 minutos, b.) entre 2 y 3 minutos y c.) más de 3 minutos. Las llegadas en restaurantes parecidos tienen un frecuencia de 35 clientes por hora. El tiempo entre llegadas tiene una distribución exponencial.

SOLUCIÓN

a.) P{t<=2/60}=1-exp(-35*(2/60))=0.6886
b.) P{2/60<=t<=3/60}=P{t<=3/60}-P{t<=2/60}=(1-exp(-35*3/60))-(1-exp(-35*2/60))=0.1376
c.) P{t>=3/60}=exp(-35*3/60)=0.1738

7. Ann y Jim, dos empleados en un restaurante de comida rápida, juegan lo siguiente, mientras esperan la llegada de clientes: Jim le paga 2 C a Ann si el próximo cliente no llega en menos de 1 minuto; en caso contrario, Ann le paga 2 C a Jim. Calcula la recompensa promedio

de Jim en un período de 8 horas. El tiempo entre llegadas es exponencial, con una media de 1.5 minutos.

SOLUCIÓN

λ=60/1.5=40 Arribos/hora

Pagos de Jim	-2C	+2C
Prob	P{t>=1}	P{t<=1}

P{t>=1}=e(-40*1/60)=0.5134
P{t<=1}=1-e(-40*1/60)=1-0.5134=0.4866

Pagos de Jim/Clientes que arriban
=-2C*0.5134+2C*0.4866=-0.0536C

Pagos esperados de Jims en 8 horas
=-0.0536C(8λ)=-0.0536C(8*40)=-11.15C (aprox.)

CONCLUSIÓN: Jim pagará a Ann un promedio de 11.15C por cada 8 horas.

8. Suponga que en el problema 7 las reglas de juego son que Jimm le paga 2C a Ann si el cliente siguiente llega después de 1.5 minutos, y Ann le paga a Jim una cantidad igual si la siguiente llegada es en menos de un minuto. Para las llegadas en el intervalo de 1 a 1.5 minutos, el juego se empata. Determine la recompensa esperada por Jim en un período de 8 horas.

SOLUCIÓN

Pagos de Jim	+2C	0C	-2C
Prob	P{t<=1}	P{1<=t<=1.5}	P{t>=1.5}

P{t<=1}=0.4866
P{t>=1.5}=exp(-40*1.5/60)=0.3679

+2C	0C	-2C
0.4866	0.1455	0.3679

Pagos esperados por Jim en 8 horas
=(2C*0.4866+0C*0.1455-2C*0.3679)*8*40
=16C (aprox.)

9. En el problema 7, suponga que Ann le paga 3C a Jim si la siguiente llegada es en menos de 1 minuto, y 3C si el tiempo entre llegadas es entre 1 y 1. 5 minutos. Ann recibe 5C de Jim si el tiempo entre llegadas es entre 1.5 y 2 minutos, y 6C si es mayor que 2 minutos. Determine la recompensa esperada por Ann en un período de 8 horas.

SOLUCIÓN

2C	3C	-5C	-6C
t<=1	1<=t<=1.5	1.5<=t<=2	t>=2

λ=40 Arribos/hora
P{t<=1}=0.4866
P{1<=t<=1.5}=exp(-40*1/60)-exp(-40*1.5/60)=0.1465
P{1.5<=t<=2}=exp(-40*1.5/60)-exp(-40*2/60)=0.1043
P{t>=2}=exp(-40*2/60)=0.2636

Pagos esperados por Jimm en 8 horas
=(2C*0.4866+3C*0.1465-5C*0.1043-6C*0.2636)*8*40=-2.22C

Jimm le paga a Ann en promedio -2.22C/8 horas.

10. Si un cliente llega a McBurguer Fast Food Restaurant en menos de 4 minutos después del cliente inmediato anterior, recibirá un descuento del 10%. Si el tiempo entre llegadas es entre 4 y 5 minutos, el cliente tiene 6% de descuento. Si el tiempo entre llegadas es mayor que 5 minutos, el cliente tiene 2% de descuento. El tiempo entre llegadas es exponencial, con una media de 6 minutos.
a.) Determine la probabilidad de que un cliente que llega reciba el máximo descuento.
b.) Determine el descuento promedio a cada cliente que llega.

SOLUCIÓN

a.) λ=60/6=10 Clientes/hora
P{t<=4 min}=1-exp(-10*4/60)=0.4866
b.) Porcentaje de descuento
10%, si t<=4
6%, si 4<t<=5
2%, si t>5
P{t<=4 min}4<t<=5=0.4866
P{4<t<=5}=exp(-10*4/60)-exp(-10*5/60)=0.0788
P{t>5}=exp(-10*5/60)=0.4346
Descuento esperado
=10*0.4866+6*0788+2*0.4346
=6.208%

11. Se sabe que el tiempo entre fallas de un refrigerador Kencore es exponencial, con una media de 9000 horas (más ó menos un año de funcionamiento), y la empresa otorga una garantía de un año con el regrigerador. ¿Cuáles son las probabilidades de que la garantía cubra una reparación por descompostura?

SOLUCIÓN

λ=365*24/9000=0.973 Fallas/año
P{t<=1}=1-exp(-0.973*1)=0.622

CONJUNTO DE PROBLEMAS 17.4-A

6. La U de A administra dos lineas de autobuses en sus campus: la roja y la verde. La roja da servicio al lado norte y la verde al lado sur, y hay una estación de transbordo que une a las dos. Los autobuses verdes llegan al azar (de acuerdo con una distribución de Poisson) a la estación de transbordo cada 10 minutos. Los rojos llegan al zar cada 7 minutos.

a.) ¿Cuál es la probabilidad de que dos autobuses lleguen a la estación durante un intervalo de 5 minutos?
b.) Un alumno, cuyo dormitorio es vecino a la estación, tiene una clase dentro de 10 minutos. Cualesquiera de los dos autobuses lo llevará al edificio de su salón. El viaje en autobús dura 5 minutos, y después tiene que caminar unos 3 minutos para llegar a su salón. ¿Cuál es la probabilidad de que llegue a tiempo a su salón?

SOLUCIÓN

a.) λ-verde=0.1 paradas/minuto, λ-rojo=1/7 paradas/minuto
λ-comb.=0.1+1/7=0.24286 paradas/minuto
P2(5)=((0.24286)^2*exp(-0.24286*5))/2!=0.219

Los dos buses pueden ser 2V, 2R ó 1V y 1R.
b.) P{t<=2}=1-exp(-0.243*2)=0.3849

7. Demuestre que la media y la varianza de la distribución de Poisson durante un intervalo t son iguales a λt, siendo λ la frecuencia de llegadas.

SOLUCIÓN

E{n|t}= $\sum_{n=1}^{\infty} n \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}$

= $\lambda t e^{-\lambda t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}$

= $\lambda t \, e^{-\lambda t} e^{+\lambda t} = \lambda t$

E{n^2|t}= $\sum_{n=0}^{\infty} n \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}$

= $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}$

= $(\lambda t) e^{-\lambda t} \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}$

= $(\lambda t) e^{-\lambda t} \frac{\partial}{\partial \lambda t} (\sum_{n=1}^{\infty} n \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!})$

= $(\lambda t) e^{-\lambda t} \frac{\partial}{\partial \lambda t} (\lambda t e^{\lambda t})$

$$= \ (\lambda t) e^{-\lambda t} (\lambda t e^{\lambda t} + \lambda t)$$

$$= \ (\lambda t^2) + \lambda t$$

Entonces,

Var{n|t}= $(\lambda t^2) + \lambda t - (\lambda t)^2$

$$= \ \lambda t$$

8. Deduzca la distribución de Poisson a partir de las ecuaciones en diferencias y diferenciales del modelo de nacimiento puro. Sugerencia: la solución de la ecuación diferencial general

$$y' + a(t) y = b(t)$$

es

$$y = e^{\int a(t) \partial t} (\int b(t) e^{\int a(t)} \partial t + constante)$$

<u>SOLUCIÓN</u>

$$Po(t) = -\lambda Po(t) \qquad (1)$$

$$Pn'(t) = -\lambda Pn(t) + \lambda Pn - 1(t) \qquad (2)$$

De (1)

$$\partial Po(t) = -\lambda Po(t) \partial t$$

con lo cual se obtiene

$$Po(t) = A e^{-\lambda t}$$

porque $P(0) = 1 \Rightarrow A = 1, Po(t) = e^{-\lambda t}$

para n=1:

$$P1'(t) = -\lambda P1(t) + \lambda Po(t) = -\lambda P1(t) + \lambda e^{-\lambda t}$$

o

$$P1'(t) + \lambda P1(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

esto produce la solución:

$$P1(t) = e^{\int \lambda \partial t} (\int \lambda e^{-\lambda t} e^{-\int \lambda \partial t} \partial t + C)$$

$$= \lambda t e^{-\lambda t} + C$$

porque $P1(0)=0, C=0, \quad y$

$$P1(t)=\frac{\lambda t e^{-\lambda t}}{1!}$$

Prueba por inducción:

Teniendo

$$Pi(t)=\frac{(\lambda t)^i e^{-\lambda t}}{i!}$$

entonces,

$$P_{i+1}{}'(t)+\lambda P_{i+1}(t)=\lambda\frac{(\lambda t)^i e^{-\lambda t}}{i!}$$

la solución es

$$\begin{aligned} P_{i+1}(t) &= e^{-\int \lambda \partial t}\frac{\left(\lambda (\lambda t)^i e^{-\lambda t} e^{\int \lambda} \partial t\right)}{i!}+C \\ &= \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^{i+1}}{(i+1)!}+C \end{aligned}$$

$$porque\ P_{i+1}(0)=0, C=0, \qquad y$$

$$P_{i+1}(t)=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^{i+1}}{(i+1)!}$$

CONJUNTO DE PROBLEMAS 17.4B

9. Demuestre que la distribución del tiempo entre salidas, que corresponde a la distribución de Poisson truncada en el modelo de muertes puras es una distribución exponencial con una media de 1/μ unidades de tiempo.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} & P(\mathit{tiempo\ entre\ salidas} > T) \\ &= P(\mathit{no\ hayan\ salidas\ durante}\ T) \\ &= P(N\ \mathit{salidas\ después\ del\ tiempo}\ T) \\ &= P_N(t)\,P(t>T)=P_N(t)=\frac{(\mu T)^o e^{-\mu T}}{0!} \\ &= e^{-\mu T} \end{aligned}$$

10. Deduzca la distribución de Poisson truncada partiendo de las ecuaciones en diferencias y diferenciales del modelo de muertes puras, usando inducción. (Nota: vea la sugerencia del problema 8, conjunto de problemas 17.4a)

SOLUCIÓN

$$P_N{}'(t) = -\mu P_N(t) \qquad (1)$$
$$P_n{}'(t) = -\mu P_n(t) + \mu P_{n+1}(t),\ 0 < n < N \qquad (2)$$

$De(1), se\ tiene$

$$P_N(t) = Ce^{-\mu t}$$

$Teniendo\ P_N(0) = 1, entonces\ C = 1 \qquad y$

$P_N(t) = e^{-\mu t}\ Luego, al\ considerar\ (2)\ para\ n = N-1$

$$P_{N-1}{}'(t) = -\mu P_{N-1}(t) + \mu P_N(t)$$
$$= -\mu P_{N-1}(t) + \mu e^{-\mu t}$$

$Entonces, P_{N-1}(t) = e^{-\int \mu t}\left(\int \mu e^{-\mu t} e^{\int \mu \partial t} \partial t + C\right)$

$$= e^{-\mu t} \mu t + C$$

$Porque\ P_{N-1}(0) = 0, C = 0\ y\ P_{N-1}(t) = (\mu t) e^{-\mu t}$

$Prueba\ de\ inducción:$

$$Teniendo\ P_{N+1}(t) = \frac{(\mu t)^{N-n-1} e^{-\mu t}}{(N-n-1)!}$$

$Se\ tiene\ la\ solución$

$$P_n(t) = \frac{(\mu t)^{N-n} e^{-\mu t}}{(N-n)!}$$

CONJUNTO DE PROBLEMAS 17.5A

1. En el ejemplo 17.5-1, determine lo siguiente:

a.) La distribución de probabilidades de la cantidad de cajas abiertas
b.) La cantidad promedio de cajas ocupadas
c.) La cantidad promedio de cajas vacias
2.

SOLUCIÓN

a.)

$$P\{0\ cajas\ abiertas\} = P_o = \frac{1}{55}$$

$$P\{1\ caja\ abierta\} = P_1 + P_2 + P_3 = \frac{1}{55}(2+4+8) = \frac{14}{55}$$

$$P\{2\ cajas\ abiertas\} = P_4 + P_5 + P_6 = \frac{1}{55}(8+8+8) = \frac{24}{55}$$

$$P\{3\ cajas\ abiertas\} = P_7 + P_8 + \ldots = 1 - \left(\frac{1}{55} + \frac{14}{55} + \frac{24}{55}\right) = \frac{16}{55}$$

b.) Cantidad promedio de cajas ocupadas

$$=0*\frac{1}{55}+1*\frac{14}{55}+2*\frac{24}{55}+3*\frac{16}{55}=2\ cajas$$

c.) cantidad promedio de cajas vacias

$$=3-2=1$$

2. En el modelo B&K del ejemplo 17.5-1, suponga que el tiempo entre llegadas al área de cajas es exponencial, con una media de 5 minutos, y que el tiempo de atención a un cliente también es exponencial, con una media de 10 minutos. Además, suponga que B&K tiene una cuarta caja, y que las cajas abren dependiendo de incrementos de dos clientes (en el ejemplo, los incrementos eran de 3 clientes). Determine lo siguiente:

a.) La probabilidad p_n de estado estable, para toda n.
b.) La probabilidad de que se necesite una cuarta caja.
c.) La cantidad promedio de cajas vacias

SOLUCIÓN

λ=1/5=0.2 arribos/min
=12 abrribos/hora

a.) $$\mu_n=\begin{cases} 5\,Clientes/hora & n=0,1,2 \\ 10\,Clientes/hora & n=3,4 \\ 15\,Clientes/hora & n=5,6 \\ 20\,Clientes/hora & n\geqslant 7 \end{cases}$$

$$P_1=\frac{12}{5}P_o \qquad =2.4\mathrm{P}_o$$

$$P_2=\left(\frac{12}{5}\right)^2 P_o \qquad =5.16\mathrm{P}_o$$

$$P_3=\left(\frac{12}{5}\right)^2\left(\frac{12}{10}\right)P_o \qquad =6.912\mathrm{P}_o$$

$$P_4=\left(\frac{12}{5}\right)^2\left(\frac{12}{10}\right)^2 P_o \qquad =8.2944\mathrm{P}_o$$

$$P_5=\left(\frac{12}{5}\right)^2\left(\frac{12}{10}\right)^2\left(\frac{12}{15}\right)P_o \qquad =6.63552\mathrm{P}_o$$

$$P_6=\left(\frac{12}{5}\right)^2\left(\frac{12}{10}\right)^2\left(\frac{12}{15}\right)^2 P_o \qquad =5.308416\mathrm{P}_o$$

$$P_{n\geqslant 7}=\left(\frac{12}{5}\right)^2\left(\frac{12}{10}\right)^2\left(\frac{12}{15}\right)^2\left(\frac{12}{20}\right)^{n-6}P_o \qquad =P_o 5.308416(0.6)^{n-6}P_o$$

$$De\sum_{n=0}^{\infty}P_n=1, se\ obtiene\ P_o=0.002587\ P_1=0.05421\ P_2=0.13010\ P_3=0.15612$$

$$P_4=0.18735\ P_5=0.14988\ P_6=0.1199\ P_{n\geqslant 7}=0.1199(0.6)^{n-6}$$

b.) $P_{n\geqslant 7}=1-(P_o+P_1+...+P_6)=0.8$

$$P\{0\, Cajas\}=P_o=0.002587$$

c.)
$$\begin{aligned}
&P\{1\, Caja\}=P_1+P_2=0.18431\\
&P\{2\, Cajas\}=P_3+P_4=0.34347\\
&P\{3\, Cajas\}=P_5+P_6=0.26978\\
&P\{4\, Cajas\}=P_7+P_8+...=0.199853\\
&\textit{Número promedio de cajas vacias}\\
&=4-(1*0.18431+2*0.34347+3*0.26978+4*0.199853)=1.52\,(aprox.)
\end{aligned}$$

3. En el modelo de B&K del ejemplo 17.5-1, suponga que las 3 cajas siempre estan abiertas, y que el funcionamiento es de tal manera que el cliente pasa a la primera caja desocupada. Calcule lo siguiente:

a.) La probabilidad de que estén funcionando las tres cajas.
b.) La probabilidad de que un cliente que llegue no tenga que esperar.

SOLUCIÓN

$$\mu_n=\begin{Bmatrix} 5\text{n} & n=1,2 \\ 15 & n=3,4,... \end{Bmatrix}$$

$$P_1=(\frac{10}{5})P_o=2\text{P}_o$$

$$P_2=(\frac{10}{5})(\frac{10}{10})P_o=2\text{P}_o$$

$$P_{n\geqslant 3}=(\frac{10}{5})(\frac{10}{10})(\frac{10}{15})^{n-2}P_o=2(\frac{2}{3})^{n-2}P_o$$

entonces

$$P_o+2\text{P}_0+2\text{P}_o+[2(\frac{2}{3})+2(\frac{2}{3})^2+...]P_0=1$$

con lo cual se tiene $P_o=0.1111$

a.) La probabilidad de que estén funcionando las tres cajas

$$\begin{aligned}
=P_{n\geqslant 3}&=1-(P_o+P_1+P_2)\\
&=1-(0.1111+0.2222+0.2222)\\
&=0.4445
\end{aligned}$$

b.) $P_{n\leqslant 2}=P_o+P_1+P_2=0.5555$

4. El First Bank Of Springdale tiene un cajero automático que despacha a automovilistas que forman una linea. Los vehículos llegan siguiendo una distribución de Poisson, con una frecuencia de 12 por hora. El tiempo necesario para hacer una transacción en el cajero es exponencial, con 6 minutos de promedio. En la línea cabe un total de 10 automóviles. Una vez llena, los automóviles que lleguen deben irse a otra parte. Calcule lo siguiente:

a.) La probabilidad de que un vehículo que llegue no pueda usar el cajero, porque la línea está llena.
b.) La probabilidad de que un vehículo no pueda usar el cajero inmediatamente al llegar.

c.) La cantidad promedio de vehículos en la línea.

SOLUCIÓN

$$\lambda_n = \begin{cases} 12\ Carro/hora & n = 0,1,\dots,10 \\ 0 & n \geqslant 11 \end{cases}$$

$$\mu_n = \frac{60}{10} = 6\,\frac{carros}{hora}$$

$$P_n = \left(\frac{12}{10}\right)^n P_o,\ n = 1,2,\dots,10$$

$$= 0, \qquad n \geqslant 11$$

$$P_o(1 + 1.2 + 1.2^2 + \dots + 1.2^{10}) = P_o\frac{1-1.2^{11}}{1-1.2}$$

$$Entonces,\ P_o = 0.0311$$

a.)

$$P_{10} = \left(\frac{12}{10}\right)^{10} P_o = 0.19259$$

b.)

$$P_{n \geqslant 1} = 1 - P_o = 1 - 0.0311 = 0.9689$$

c.) Cantidad promedio de vehículos en la línea

$$= 0\mathrm{P}_o + 1\mathrm{P}_1 + \dots + 10\mathrm{P}_{10}$$
$$= 1*0.03132 + 2*0.04479 + 3*0.05375 + 4*0.0645 + 5*0.0774 + 6*0.09288 + 7*0.11145 + 8*0.13374$$
$$+ 9*0.16049 + 10*0.19259 = 6.71071$$

5. ¿Alguna vez oyó usted la afirmación contradictoria “el lugar está tan atestado que ya nadie va allí”? Esta afirmación se puede interpretar como decir que aumenta la oportunidad de rehusar al aumentar la cantidad de clientes que buscan servicio. Una plataforma posible para modelar este caso es decir que la frecuencia de llegadas al sistema disminuye al aumentar la cantida de clientes en el sistema. En forma más específica, examinaremos el caso simplificado del M&M Pool Club, donde los clientes suelen llegar en pares para “jugar pool”. La frecuencia normal de llegadas es 6 pares (de personas) por hora. Sin embargo, una vez que la cantidad de pares que está en el billar es mayor que 8, la frecuencia de llegada baja a 5 pares por hora. Se supone que el proceso de llegadas sigue una distribución de Poisson. Cada par juega pool durante un tiempo exponencial, con 30 minutos de promedio. El billar tiene un total de 5 mesas y no pueden caber más de 12 pares en cualquier momento. Calcule lo siguiente:

a.) La probabilidad de que los clientes comiencen a rehusar.
b.) La probabilidad de que se estén usando todas las mesas.
c.) La cantidad promedio de mesas en uso.
d.) La cantidad promedio de pares en espera de que se desocupe una mesa de pool.

SOLUCIÓN

$$\lambda_n = 6\,\frac{arribos}{hora}\,,\ n = 0,1,2\,,\ldots,8$$

$$= 5\,\frac{arribos}{hora}\,,\ n = 9,\ldots,12$$

$$\mu_n = \frac{n}{0.5} = \frac{2\text{n}}{h}\,,\ n = 1,2\,,3\,,4$$

$$= \frac{10}{hr}\,,\ n \geqslant 5$$

$$P_1 = \frac{6}{2} P_o = 3\text{P}_o$$

$$P_2 = \frac{6}{2}\frac{6}{4} P_o = 4.5\text{P}_o$$

$$P_3 = \frac{6}{2}\frac{6}{4}\frac{6}{6} P_o = 4.5\text{P}_o$$

$$P_4 = \frac{6}{2}\frac{6}{4}\frac{6}{6}\frac{6}{8} P_o = 3.375\text{P}_o$$

$$P_5 = \frac{6}{2}\frac{6}{4}\frac{6}{6}\frac{6}{8}\frac{6}{10} P_o = 2.025\text{P}_o$$

$$P_6 = \frac{6}{2}\frac{6}{4}\frac{6}{6}\frac{6}{8}\frac{6}{10}\frac{6}{10} P_o = 1.215\text{P}_o$$

$$P_7 = \frac{6}{2}\frac{6}{4}\frac{6}{6}\frac{6}{8}\frac{6}{10}\frac{6}{10}\frac{6}{10} P_o = 0.729\text{P}_o$$

$$P_8 = \frac{6}{2}\frac{6}{4}\frac{6}{6}\frac{6}{8}\left(\frac{6}{10}\right)^4 P_o = 0.4374\text{P}_o$$

$$P_{n\geqslant 9} = \frac{6}{2}\frac{6}{4}\frac{6}{6}\frac{6}{8}\left(\frac{6}{10}\right)^4\left(\frac{5}{10}\right)^{n-8} P_o = 0.4374(5)^{n-8} P_o$$

$$De \sum_{n=0}^{12} P_n = 1, se\ tiene\ P_o = 0.0495$$

$$P_1 = 0.1486\,,\ P_2 = 0.2229\,,\ P_3 = 0.2229\,,\ P_4 = 0.1671\,,\ P_5 = 0.1003\,,\ P_6 = 0.0602\,,\ P_7 = 0.0361\,,\ P_8 = 0.0217,$$
$$P_9 = 0.0108\,,\ P_{10} = 0.0054\,,\ P_{11} = 0.0027\,,\ P_{12} = 0.001354$$

a.) $P_{12} = 0.4374 * 0.5^4 * 0.0495 = 0.00135$

b.) $P_{n\geqslant 5} = 1 - (P_o + P_1 + P_2 + P_3 + P_4) = 0.2385$

c.) La cantidad promedio de mesas en uso

$$= 0\text{P}_o + 1\text{P}_1 + 2\text{P}_2 + 3\text{P}_3 + 4\text{P}_4 + 5\text{P}_{n\geqslant 5} = 2.9768$$

d.)
$$1\text{P}_6 + 2\text{P}_7 + \ldots + 7\text{P}_{12}$$
$$= 1*0.0602 + 2*0.0361 + 3*0217 + 4*0.0108 + 5*0.0054 + 6*0.0027 + 7*0.00135$$
$$= 0.2935\ pares$$

6. En una peluquería se atiende a un cliente cada vez, y tiene tres sillas para los clientes que esperan. Si el lugar está lleno, los clientes van a otra parte. Las llegadas siguen una distribución de Poisson con una media de 4 por hora. El tiempo de un corte de pelo es exponencial, con 15

minutos de promedio. Determine lo siguiente:

a.) Las probabilidades de estado estable.
b.) La cantidad esperada de clientes en la peluquería.
c.) La probabilidad de que los clientes vayan a otra parte por estar lleno el local.

SOLUCIÓN

$$\lambda = \frac{clientes}{hora}$$

$$\begin{Bmatrix} 4 & n=0,1,\ldots,4 \\ o & n\geqslant 5 \end{Bmatrix}$$

$$\mu_n = \frac{60}{15} = 4\frac{clientes}{hora}$$

a.)

$$P_1 = \frac{4}{4} P_o$$

$$P_2 = (\frac{4}{4})^2 P_o$$

$$P_3 = (\frac{4}{4})^3 P_o$$

$$P_4 = (\frac{4}{4})^4 P_o$$

$$P_o + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 1 \Rightarrow P_o = \frac{1}{5}$$

$$P_o = P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = \frac{1}{5}$$

b.) Cantidad esperada de clientes en la peluquería

$$0\mathrm{P}_o + 1\mathrm{P}_1 + 2\mathrm{P}_2 + 3\mathrm{P}_3 + 4\mathrm{P}_4 = \frac{1}{5}(1+2+3+4) = 2$$

c.) $P_4 = 0.2$

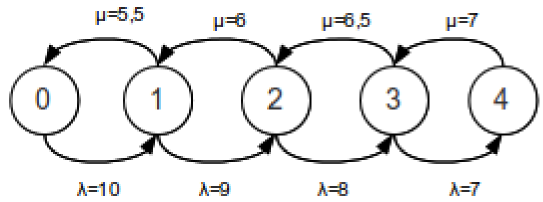
7. Examine un caso de cola de un servidor, en el que las tasas de llegada y de servicio son:

$$\lambda_n = 10 - n, n = 0,1,2,3$$

$$\mu_n = \frac{n}{2} + 5, n = 1,2,3,4$$

Este caso equivale a reducir la frecuencia de llegadas y aumentar la rapidez del servicio a medida que aumenta la cantidad n en el sistema.
a.) Formule el diagrama de transición, y determine la ecuación de balance para el sistema.
b.) Determine las probabilidades de estado estable.

SOLUCIÓN



a.)

$$5{,}5\,P_1 = 10\mathrm{P}_o$$
$$10\mathrm{P}_o + 6\mathrm{P}_2 = (5{,}5+9)\,P_1$$
$$9\mathrm{P}_1 + 6{,}5\,P_3 = (6+8)\,P_2$$
$$8\mathrm{P}_2 + 7\mathrm{P}_4 = (6{,}5+7)\,P_3$$

b.)

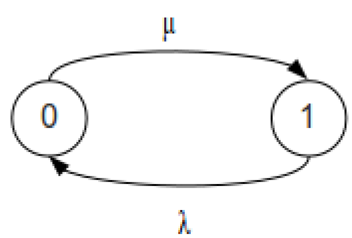
$$P_1 = 1{,}82\,P_o\; P_2 = 2{,}727\,P_o\; P_3 = 3{,}3566\,P_o\; P_4 = 3{,}3566\,P_o$$
$$P_o + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 1 \Rightarrow P_o = 0.088882\; P_1 = 0.1614\; P_2 = 0.2422\; P_3 = 0.2981\; P_4 = 0.2983$$

8. En un modelo de cola solo se permite que haya un cliente en el sistema. Los clientes que llegan y encuentran ocupada la instalación se van y nunca regresan. Suponga que la distribución de llegadas es de Poisson, con promedio λ por unidad de tiempo, y que el tiempo de servicio es exponencial con una media de 1/μ unidades de tiempo.

a.) Trace el diagrama de transición y determine las ecuaciones de balance.
b.) Determine las probabilidades de estado estable.
c.) Determine la cantidad promedio en el sistema.

SOLUCIÓN

a.)



$$\mu P_1 = \lambda P_o$$
$$P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_o$$

b.)

$$P_o+\frac{\lambda}{\mu}P_o=1$$
$$P_o=\frac{1}{1+\rho},\ \rho=\frac{\lambda}{\mu}$$
$$P_1=\frac{\rho}{1+\rho}$$

c.)

$$L_s=0\mathrm{P}_o+1\mathrm{P}_1=\frac{\rho}{1+\rho}$$

d.)

$$\lambda_{eff}=\lambda P_o=\frac{\lambda}{1+\rho}$$

e.)

$$W_q=\frac{L_s}{\lambda_{eff}}-\frac{1}{\mu}$$
$$\frac{\rho/(1+\rho)}{\lambda/(1+\rho)}-\frac{1}{\mu}=0$$

9. La demostración por inducción, para deducir la solución general del modelo generalizado, se aplica como sigue. Considere

$$p_k=\prod_{i=0}^{k-1}\left(\frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}\right)p_o,\ k=1,2,3,\ldots$$

se sustituyen $p_{n-1}\ y\ p_{n-2}$ en la ecuación general de diferencias donde intervienen $p_n,\ p_{n-1}\ y\ p_{n-2}$ para deducir la ecuación de p_n que se busca. Compruebe este procedimiento.

SOLUCIÓN

$$\lambda_{n-1}P_{n-1}+\mu_{n+1}P_{n+1}=\lambda_{n-1}\left(\frac{\lambda_o}{\mu_1}*\frac{\lambda_1}{\mu_2}\ldots\frac{\lambda_{n-2}}{\mu_{n-1}}\right)+\mu_{n+1}\left(\frac{\lambda_o}{\mu_1}*\frac{\lambda_1}{\mu_2}\ldots\frac{\lambda_n}{\mu_{n+1}}\right)$$
$$=\mu_n\left(\frac{\lambda_o}{\mu_1}*\frac{\lambda_1}{\mu_2}\ldots\frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n}\right)+\lambda_n\left(\frac{\lambda_o}{\mu_1}*\frac{\lambda_1}{\mu_2}\ldots\frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n}\right)$$
$$=\mu_n P_n+\lambda_n P_n$$
$$=(\mu_n+\lambda_n)P_n$$

CONJUNTO DE PROBLEMAS 17.6B

7. En la cola (M/M/1):(DG/∞/∞), describa un argumento plausible de por qué en general L_s no

es igual a L_q+1. ¿Bajo qué condición será válida la igualdad?

SOLUCIÓN

En general $L_s<L_q+1$. La razón es que $P_o>0$, usualmente. Considere

$$\begin{aligned} L_q &= \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)P_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} nP_n - \sum_{n=1}^{\infty} P_n \\ &= L_s-(1-P_o) \end{aligned}$$

A medida que P_o se aproxima a cero, L_s se aproximará cada vez más a L_q+1 lo cual se puede expresar como $\lim_{P_o \to 0} Ls = L_q$.

8. Para la cola (M/M/1):(DG/∞/∞), deduzca la ecuación de L_q, usando la definición básica $\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)p_n$.

SOLUCIÓN

Considere

$$\begin{aligned} L_q &= \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)P_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)(1-\rho)\rho^n \\ &= (1-\rho)\rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\rho^{n-1}\right) \\ &= (1-\rho)\rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\rho^{n}\right) \\ &= (1-\rho)\rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{1}{1-\rho}\right) \\ &= \rho^2(1-\rho)\left(\frac{1}{1-\rho^2}\right) \\ &= \frac{\rho^2}{1-\rho} \end{aligned}$$

9. Para la cola (M/M/1):(DG/∞/∞), demuestre que

a.) El número esperado en la cola es $=\frac{1}{1-\rho}$ si la cola no está vacía.

b.) El tiempo estimado de espera en la cola, para quienes deben esperar, es $=\frac{1}{\mu-\lambda}$.

SOLUCIÓN

a.)

$$P\{\,j\ en\ la\ cola\,|\,j\geqslant 1\}$$
$$=P\{\,n\ en\ el\ sistema\,|\,n\geqslant 2\}$$
$$=\frac{P_n}{\sum_{j=2}^{\infty}P_j}$$

entonces ,

$$número\ esperado=\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)\frac{P_n}{\sum_{j=2}^{\infty}P_j}$$

$$\frac{\sum_{n=1}^{\infty}nP_n-P_1}{\sum_{n=2}^{\infty}P_n}-1$$

$$=\frac{\frac{\rho}{1-\rho}-\rho(1-\rho)}{1-[(1-\rho)+\rho(1-\rho)]}-1$$

$$=\frac{1}{1-\rho}$$

b.) El número esperado en cola

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)\left(\frac{P_n}{\sum_{j=1}^{\infty}P_j}\right)$$

$$=\frac{\sum_{n=1}^{\infty}nPn-\sum_{n=1}^{\infty}Pn}{\sum_{j=1}^{\infty}P_j}$$

$$=\frac{\left(\frac{\rho}{1-\rho}\right)-\rho}{\rho}$$

$$=\frac{\rho}{1-\rho}$$

Entonces ,

El tiempo esperado en la cola para quienes deben esperar es

$$\frac{\frac{\rho}{(1-\rho)}}{\lambda}$$

$$=\frac{1}{\mu-\lambda}$$

CONJUNTO DE PROBLEMAS 17.6D

7. Las probabilidades Pn de que haya n clientes en el sistema (M/M/1):(DG/5/∞) se ven en la tabla siguiente:

n	0	1	2	3	4	5
Pn	0.399	0.249	0.156	0.097	0.061	0.038

La frecuencia de llegada λ es 5 clientes por hora. La rapidez del servicio μ es 8 clientes por hora. Calcule lo siguiente:

a.) La probabilidad de que un cliente que llega pueda entrar al sistema.
b.) La frecuencia con la que los clientes que llegan no pueden entrar al sistema.
c.) La cantidad esperada en el sistema.
d.) El tiempo promedio de espera en la cola.

<u>SOLUCIÓN</u>

a.) $$\begin{aligned} P_{n\leq 4} &= P_o + P_1 + \ldots + P_4 \\ &= 0.962 \end{aligned}$$

b.) $$\begin{aligned} \lambda_{perdido} &= \lambda P_5 \\ &= 5 * 0.038 = 0.19 \frac{clientes}{hora} \end{aligned}$$

c.) $$\begin{aligned} L_s &= 0*0.399 + 1*0.249 + 2*0.156 + 3*0.097 + 4*0.061 + 5*0.038 \\ &= 1.286 \end{aligned}$$

d.) $$W_q = W_s - \frac{1}{\mu}$$

$$\lambda_{eff} = 5(1-0.038) = 4.81 \frac{clientes}{hora}$$

$$\begin{aligned} W_s &= \frac{L_s}{\lambda_{eff}} \\ &= \frac{1.286}{4.81} \\ &= 0.2675\, horas \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_q &= 0.2675 - \frac{1}{8} \\ &= 0.1424\, horas \end{aligned}$$

8. Demuestre que cuando ρ=1 para el sistema (M/M/1):(DG/N/∞) la cantidad esperada en el sistema, Ls, es igual a N/2. (Sugerencia: 1+2+...+i=i(i+1)/2.

SOLUCIÓN

$$P_n = \frac{(1-\rho)\rho^n}{1-\rho^{N+1}}$$

$$\lim_{\rho \to 1} P_n = \lim_{\rho \to 1} \frac{(1-\rho)\rho^n}{1-\rho^{N+1}}$$

$$= \lim_{\rho \to 1} \frac{n\rho^{n-1} - n + 1\ \rho^n}{-(N+1)\rho^N}$$
$$= \frac{1}{N+1}$$
$$entonces,$$
$$L_s = \sum_{n=0}^{N} nP_n$$
$$= \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} n$$
$$= \frac{N(N+1)}{2(N+1)} = \frac{N}{2}$$

9. Desmuestre que λ_{ef}, para el sistema (M/M/1):(DG/N/∞) se puede calcular con la ecuación $\lambda_{ef} = \mu(L_s - L_q)$

SOLUCIÓN

$$w_s = W_q + \frac{1}{\mu}$$
$$\lambda_{ef} w_s = \lambda_{ef} W_q + \frac{\lambda_{ef}}{\mu}$$
$$entonces,$$
$$L_s = L_q + \frac{\lambda_{ef}}{\mu}$$
$$ó$$
$$\lambda_{ef} = \mu(L_s - L_q)$$

CONJUNTO DE PROBLEMAS 17.6 E

10. Morse indica que para el modelo (M/M/c):(DG/N/∞/∞) cuando $\frac{\rho}{c} \to 1$,

$$L_q = \frac{\rho}{c-\rho}$$

El que $\frac{\rho}{c} \to 1$ quiere decir que los servidores estan extremadamente ocupados. Con esta información demuestre que la relación del tiempo promedio de espera en la cola del modelo

(M/M/c):(DG/N/∞/∞) entre el correspondiente en el modelo (M/M/1):(DG/N/∞/∞) tiende a $\frac{1}{c}$ cuando $\frac{\rho}{c} \rightarrow 1$. Así, para c=2, se puede reducir el tiempo promedio de espera en 50%. La conclusión de este ejercicio es que siempre se aconseja unir los servicios, independientemente de los “sobrecargado” que puedan estar los servidores.

SOLUCIÓN

Para c servidores en paralelo:

$$L_q = \frac{\rho}{1-\rho} \; con\, tal\, que \, \frac{\rho}{c} \rightarrow 1$$

entonces ,

$$Wq_c = \frac{1}{\lambda_c} \frac{\rho}{c-\rho} = \frac{1}{c\mu - \lambda_c}$$

Para un único servidor

$$Wq_1 = \frac{\lambda_1}{\mu(\mu - \lambda_1)}$$

Porque $\lambda_c = c\lambda_1$, *se tiene*

$$\frac{Wq_c}{Wq_1} = \left(\frac{\frac{1}{c(\mu-\lambda_1)}}{\frac{\lambda_1}{\mu(\mu-\lambda_1)}} \right) = \frac{1}{c(\frac{\lambda_1}{\mu})}$$

$$= \frac{1}{c\left(\frac{\lambda_c/\mu}{\mathrm{c}}\right)}$$

$$= \frac{1}{c\left(\frac{\rho}{\mathrm{c}}\right)}$$

$$\lim_{\frac{\rho}{c} \rightarrow 1} \frac{Wq_c}{Wq_1} = \frac{1}{c}$$

11. En la deducción de Pn para el modelo (M/M/1):(DG/N/∞/∞) indique en qué parte de esa deducción se requiere la condición $\frac{\rho}{c} < 1$. Explique, con sus propias palabras, el significado de esa condición . ¿Qué sucederá si no se satisface esa condición?

SOLUCIÓN

La determinación de Po implica el desarrollo de la serie de sumas finitas $\sum_{n=c}^{\infty} \left(\frac{\rho}{c}\right)^{n-c} = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu c}\right)^{j}$ la serie diverge si $\lambda \geqslant \mu c$. La condición requiere que los clientes sean servidos a una tasa mayor a la tasa de arribo . De otro modo, la cola crecerá indefinidamente.

12. Demuestre que Ls=Lq+c, partiendo de la definición $L_q=\sum_{n=c+1}^{\infty}(n-c)P_n$, siendo $\bar{c}$ la cantidad promedio de servidores ocupados. En consecuencia, demuestre que $\bar{c}=\frac{\lambda_{ef}}{\mu}$.

SOLUCIÓN

$$
\begin{aligned}
&L_q=\sum_{n=c}^{\infty}(n-c)P_n\\
&\sum_{n=c}^{\infty}nP_n-c\sum_{n=c}^{\infty}P_n+\sum_{n=0}^{c-1}nP_n-\sum_{n=0}^{c-1}nP_n+c\sum_{n=0}^{c-1}P_n-c\sum_{n=0}^{c-1}P_n\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}nP_n-c\sum\sum_{n=0}^{\infty}P_n+\sum_{n=0}^{c-1}(c-n)P_n\\
&=L_s-C+(\textit{número de servidores vacios})\\
&=L_s-\bar{c}\\
&\textit{ahora , por definición}\\
&L_s=L_q+\frac{\lambda_{ef}}{\mu}\\
&\textit{al desarrollar esto se tiene}\,\bar{c}=\frac{\lambda_{ef}}{\mu}
\end{aligned}
$$

13. Demuestre que para el modelo (M/M/1):(DG/N/∞/∞) se puede obtener Pn a partir de la correspondiente para el modelo (M/M/c):(DG/N/∞/∞) haciendo que c=1.

SOLUCIÓN

$$
P_n=\left\{\begin{matrix}\frac{\lambda^n}{n!\,\mu^n}p_o, & n\leqslant c\\ \frac{\lambda^n}{c!\,c^{n-c}\mu^n}p_o & n>c\end{matrix}\right\}
$$

$$
\textit{para}\ c=1,
$$

$$
P_n=\left\{\begin{matrix}\frac{\lambda}{\mu}p_o, & n=1\\ (\frac{\lambda}{\mu})^n\ p_o & n\geqslant 1\end{matrix}\right\}
$$

$$
\textit{entonces ,}
$$

$$
P_n=(\frac{\lambda}{\mu})^n P_o, n=1,2, ...
$$

14. Demuestre que para el modelo (M/M/c):(DG/N/∞/∞)

$$
L_q=\frac{c\rho}{c-\rho^2}p_c
$$

SOLUCIÓN.

$$L_q = P_o \frac{1}{c!} \frac{\sum_{n=c+1}^{\infty} (\frac{\lambda}{\mu})^n}{C^{n-c}}$$

$$= P_o \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^c}{c!} \sum_{n=c+1}^{\infty} (n-c)(\frac{\lambda}{\mu c})^{n-c}$$

$$= P_o \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^c}{c!} \sum_{j=1}^{\infty} j(\frac{\lambda}{\mu c})^j$$

$$= P_o \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^c}{c!} (\frac{\lambda}{\mu c}) \frac{\partial}{\partial (\frac{\lambda}{\mu c})} \sum_{j=0}^{\infty} (\frac{\lambda}{\mu c})^j$$

$$= P_o \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^c}{c!} (\frac{\lambda}{\mu c}) \{\frac{\lambda / \mu c}{(1-\lambda / \mu c)^2}\}$$

$$= P_c \frac{\rho / c}{(1-\rho / c)^2} = \frac{\rho}{(c-\rho)^2} P_c$$

15. Demuestre que para el modelo (M/M/c):(DG/N/∞/∞)

a.) La probabilidad de que un cliente esté esperando es $\frac{\rho}{(c-\rho)} P_c$.

b.) La cantidad promedio en la cola, cuando no está vacia, es $\frac{c}{(c-\rho)}$.

c.) El tiempo esperado de espera en la cola, para los clientes que deben esperar es $\frac{1}{\mu(c-\rho)}$.

SOLUCIÓN

a.)

$$P\{Cliente\ esté\ esperando\}$$

$$P\{c+1\ se\ encuentren\ en\ el\ sistema\}$$

$$= \sum_{n=c+1}^{\infty} P_n$$

$$= \sum_{n=c}^{\infty} P_n - P_c$$

$$= P_o \frac{\rho^c}{c!} \frac{1}{1-\frac{\rho}{c}} - P_c$$

$$= P_c \left\{ \frac{1}{1-\frac{\rho}{c}} - 1 \right\}$$

$$= P_c \left(\frac{\rho}{c-\rho} \right)$$

b.) La cantidad promedio en la cola cuando no está vacia

$$\sum_{i=c+1}^{\infty}(i-c)\frac{P_i}{\sum_{j=c+1}^{\infty}P_j}$$

$$\frac{L_q}{\sum_{j=c+1}^{\infty}P_j}=\frac{L_q}{P_c\left(\frac{\rho}{c-\rho}\right)}$$

$$ahora\ , L_q=\frac{P_o}{c!}\sum_{n=c+1}^{\infty}(n-c)\frac{\rho^n}{c^{n-c}}$$

$$=P_o\frac{\rho^c}{c!}\left(\frac{\rho/c}{(1-\rho/c)^2}\right), \rho/c<1$$

$$=P_c\left(\frac{c\rho}{(c-\rho)^2}\right), \rho/c<1$$

Sustituyendo L_q *se obtiene el resultado deseado*

c.) El tiempo esperado de espera en la cola, para los clientes que deben esperar es cuando hay c en el sistema es,

$$=\frac{1}{\lambda}\sum_{i=c+1}^{\infty}(i-c)\frac{P_i}{\sum_{n=0}^{\infty}P_n}$$

$$=\frac{L_q/\lambda}{P_c/(1-\rho/c)}=\frac{1}{\mu(c-\rho)}$$

16. Demuestre que la función de densidad de probabilidades del tiempo de espera en la cola, para el modelo (M/M/c):(DG/N/∞/∞) es

$$W_q(T)=\begin{cases}1-\dfrac{\rho^c}{(c-1)!(c-\rho)}p_o & T=0\\ \dfrac{\mu\rho^c e^{-\mu(c-\rho)T}}{(c-1)!}p_o & T>0\end{cases}$$

(Sugerencia: convierta el caso de c canales en un solo cana equivalente para el cual

$$P\{t>T\}=P\{\min_{1\leqslant i\leqslant c}>T\}=(e^{-\mu T})^c e^{-\mu c T}$$

en donde t es el tiempo de servicio en el canal único equivalente.)

<u>SOLUCIÓN</u>

Primero convertir el caso de los c canales en un solo canal equivalente. Se tiene que el cliente llega a la j-ésima posición de la fila. Debido a que hay c canales en paralelo, el tiempo de servicio, t, para cada uno de los otros j-1 clientes y el cliente en servicio (uno) se detarminan así: Teniendo $t_{1,}t_{2,\ldots}t_c$ como tiempos de servicio actual en los c canales. Entonces:

$$P\{t>T\}=P\{\min_{1\leqslant i\leqslant c}>T\}=(e^{-\mu T})^c=e^{-\mu c T}$$

esto se cumple porque si $\underset{i}{min} > T$, entonces t_i debe debe ser mayor que T.

Ahora,

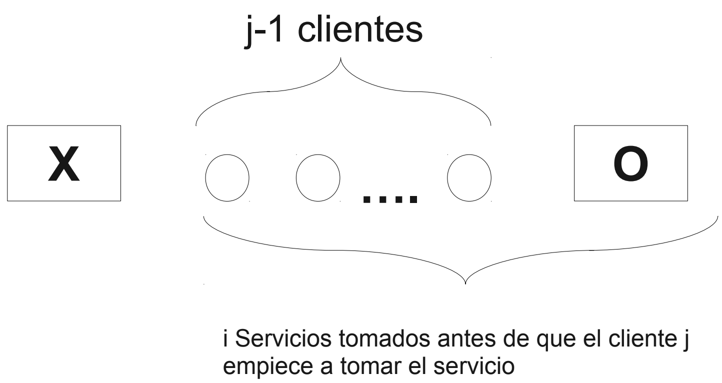
$$F_t(t) = 1 - P\{t > T\}$$

$$= 1 - e^{-\mu c T}, T > 0$$

$$F_t(t) = \frac{\partial F_t(t)}{\partial T} = \mu c e^{-\mu c T}, T > 0$$

lo cual corresponde a la distribución exponencial con media $\frac{1}{\mu c.}$

los c canales pueden ser convertidos en un único canal equivalente como:



Antes de que el cliente j empiece el servicio , otros j clientes debieron ser procesados cada uno con un tiempo de servicio T. Aquí se asume que todos los c servidores están ocupados. Si algún servidor está libre, llegará el cliente j y el tiempo de espera en la fila será cero y el caso especial es tratado por aparte.

Sea Γ el tiempo el tiempo de espera en cola cuando j clientes están siendo atendidos. Entonces

$$\Gamma = T_1^I + T_2 + \ldots + T_j$$

Donde $T_1^I + T_2 + \ldots + T_j$ tienen distribución exponencial con media $\frac{1}{\mu c}$. T_1^I respresenta el tiempo restando para el cliente que está siendo atendido. La propiedad de pérdida de memoria implica que T_1^I también está distribuido normalmente con media $\frac{1}{\mu c}$. Entonces,

$$W_q(T_1^I / J) = \mu c (\mu c \Gamma)^{j-1} \frac{e^{-\mu c \Gamma}}{(j-1)!}, \Gamma > 0$$

$W_q(\Gamma)$ *como la función de densidad de probabilidad, entonces*

$$W_q(\Gamma)=\sum_{j=1}^{\infty} W_q(\Gamma/j)q_j$$

donde

$$q_j=\begin{Bmatrix} \sum_{k=0}^{c-1} P_k & j=0 \\ P_{c+j-1}, & j>0 \end{Bmatrix}$$

para $\Gamma>0$

$$W_q(\Gamma)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\mu c(\mu c\Gamma)^{j-1}e^{-\mu c\Gamma}}{(j-1)!}\frac{\rho^{c+j-1}}{c!\,c^{j-1}}P_o$$

$$=\frac{\rho^c\mu c\,e^{-\mu c\Gamma}}{\text{c!}}P_o\frac{\sum_{j=0}^{\infty}(\rho\mu c\Gamma/c)^j}{\text{j!}}$$

$$=\frac{\rho^c\mu c\,e^{-\mu c\Gamma}}{\text{c!}}P_o e^{-\lambda\Gamma}$$

$$=\frac{\rho^c\mu\,e^{-\mu(c-\rho)\Gamma}}{\text{(c-1)!}}P_o$$

Teniendo

Para $\Gamma=0$ *la probabilidad correspondiente es* $\sum_{k=0}^{c-1}P_k$, *ó*

$$1-\sum_{k=c}^{\infty}P_k=1-\sum_{j=o}^{\infty}P_{c+j}$$

$$=1-\frac{\sum_{j=0}^{\infty}\rho^{c+j}}{c!\,c^j}P_o$$

$$=1-\frac{\rho^c}{c!}\left(\frac{\mathrm{P}_o}{1-\frac{\rho}{c}}\right)$$

$$=1-\left\{\frac{\rho^c P_o}{(c-1)!(c-\rho)}\right\}\text{ entonces}$$

$$W_q(\Gamma)=\begin{Bmatrix} 1-\frac{\rho^c P_o}{(c-1)!(c-\rho)} & \Gamma=0 \\ \mu\rho^c\frac{e^{-\mu(c-\rho)\Gamma}}{(c-1)!}P_o & \Gamma>0 \end{Bmatrix}$$

17. Demuestre que para $W_q(T)$ en el problema 16,

$$P\{t>Y\}=P\{t>0\}e^{-(c\mu-\lambda)y}$$

$P\{T>0\}$ es la probabilidad de que un cliente que llega tenga que esperar.

SOLUCIÓN

$$
\begin{aligned}
P\{T>y\} &= \int_y^{\infty} W_q(T)\,\partial T \\
&= \frac{c\mu\rho^c}{c!} P_o \int_y^{\infty} e^{-(c\mu-\lambda)T}\,\partial T \\
&= \frac{\rho^c c\mu}{c!(c\mu-\lambda)} e^{-(c\mu-\lambda)y} P_o \\
&= \frac{\rho^c P_o}{c!(1-\rho/c)} e^{-(c\mu-\lambda)y} \\
&= P\{T>0\} e^{-(c\mu-\lambda)y} \\
&= donde\, P\{T>0\} = 1-P\{T=0\}
\end{aligned}
$$

18. Demuestre que el tiempo de espera en el sistema del modelo (M/M/c):(PLPS/∞/∞) tiene la siguiente función de densidad de probabilidades:

$$
W(\Gamma) = \mu e^{-\mu\Gamma} + \frac{\rho^c \mu e^{-\mu\Gamma}}{(c-1)!(c-\rho-1)} \left\{ \frac{1}{c-\rho} - e^{-\mu(c-\rho-1)\Gamma} \right\} P_o,\ \Gamma \geqslant 0
$$

(Sugerencia: Γ es la convolución del tiempo de espera T en la cola [Véase el problema 16] y la distribución del tiempo de servicio)

SOLUCIÓN

Para el problema 16, el tiempo de espera en el sistema es expresado por

$$
T = T_1^I + T_2 + \ldots + T_j + t_j
$$

Donde

$t_j = Tiempo\ de\ servicio\ actual\ para\ el\ cliente\ j$

$t_j \quad es\ exponencial\ con\ media\ \frac{1}{\mu}$

$Entonces\ , T\ es\ la\ convolución\ del\ tiempo\ de\ espera\ en\ la\ cola\ y\ el\ tiempo\ de\ servicio\ actual\ para\ el\ cliente\ j$

$Esto\ significa\ que\ W(T)\ es\ la\ convolución\ de\ W_q(\Gamma)\ y\ g(t);\ que\ es$

$W(T) = W_q(\Gamma) * g(t)$

$donde\ ,$

$g(t) = \mu e^{-\mu t}, t > 0$

$$W(T) = W_q(0) * g(T) + \int_{0^+}^{T} W_q(\Gamma) * g(T-\Gamma) \partial \Gamma$$

$$= \left(1 - \frac{\rho^c P_o}{(c-1)!(c-\rho)}\right) \mu e^{-\mu T} + P_o \int_{0^+}^{T} \mu \rho^c \frac{e^{-\mu(c-\rho)\Gamma}}{(c-1)!} \mu e^{-\mu(T-\Gamma)} \partial \Gamma$$

$$= \left(1 - \frac{\rho^c P_o}{(c-1)!(c-\rho)}\right) \mu e^{-\mu T} + \frac{\mu \rho^c e^{-\mu T}}{(c-1)!(c-1-\rho)} P_o \left\{1 - e^{-\mu(c-1-\rho)T}\right\}$$

$$= \mu e^{-\mu T} - \frac{\rho^c P_O \mu e^{-\mu T}}{(c-1)!(c-1-\rho)} \frac{(c-\rho-1)}{(c-\rho)} + \frac{\mu \rho^c e^{-\mu T} P_o}{(c-1)!(c-1-\rho)} - \frac{\mu \rho^c e^{-\mu T} e^{-\mu(c-1-\rho)T}}{(c-1)!(c-1-\rho)}$$

$$= \mu e^{-\mu T} + \frac{\rho^c P_O \mu e^{-\mu T}}{(c-1)!(c-1-\rho)} \left\{\frac{1}{(c-\rho)} - e^{-\mu(c-1-\rho)T}\right\} \qquad T > 0$$

CONJUNTO DE PROBLEMAS 17.6 F

2. Eat & Gas es una gasolinera con dos bombas. El carril que llega a ellas puede dar cabida cuanto mucho a cinco automóviles, incluyendo los que llenan el tanque. Los que llegan cuando el carril está lleno van a otra parte. La distribución de los vehículos que llegan es de Poisson, con promedio de 20 por hora. El tiempo para llenar y pagar las compras es exponencial, con 6 minutos de promedio. Determine lo siguiente:

a.) El porcentaje de automóviles que llenarán el tanque en otro lado.
b.) El porcentaje de tanque en que se usa una bomba.
c.) La utilización porcentual de las dos bombas.
d.) L aprobabilidad de que un automóvil que llegue no reciba servicio de inmediato, sino que se forme en la cola.
e.) La capacidad del carril que asegure que, en promedio, no haya más del 10% de los vehículos que llegan se vayan a otra parte.
f.) La capacidad del carril que asegure que, en promedio, la probabilidad de que las dos bombas estén inactivas sea 0.05 o menos.

<u>SOLUCIÓN</u>

c=2 λ=20/hora N=5 μ=60/6=10/hora

a.)

$P_5 = 0.1818 \quad ó \quad 18.18\%$

b.)

$P_1 = 0.1818 \quad ó \quad 18.18\%$

c.)

$$\% \, Utilización = 100\left(\frac{L_s - L_q}{c}\right)$$
$$= \frac{2.727 - 1.091}{2} x100$$
$$= 81.8\%$$

d.)

$$Probabilidad = P_2 + P_3 + P_4 = 0.54546$$

e.)

$$P_N = 0.1$$

N	5	8	9	10
P_N	0.1818	..0.1116	0.1053	0.0952

$$N \geqslant 10 \; espacios\,(incluyendo\; las\; bombas)$$

f.)

$$P_o \leqslant 0.05$$

N	5	8	9	10
P_N	0.0909	..0.0588	0.0526	0.0416

$$N \geqslant 10$$

3. Un pequeño taller de ajuste de motores ocupa a tres mecánicos. A principio de Marzo de cada año, las personas llevan al taller las segadoras y podadoras para que reciban mantenimiento. El taller quiere aceptar todas las segadoras y podadoras que le lleven. Sin embargo, cuando los clientes que llegan ven que el piso del taller está cubierto con trabajos en espera, van a otra parte para recibir un servicio más inmediato. El piso del taller puede dar cabido cuando mucho a 15 segadoras ó podadoras, además de las que reciben el servicio. Los clientes llegan al taller cada 15 minutos en promedio, y un mecánico tarda un promedio de 30 minutos en terminar cada trabajo. El tiempo entre llegadas y el tiempo de servicio tienen distribución exponencial. Determine lo siguiente:

a.) Cantidad promedio de mecánicos sin trabajo.
b.) Porción del trabao que va a la competencia en un día de 10 horas, por la capacidad limitada del taller.
c.) La probabilidad de que el siguiente cliente que llegue reciba servicio.
d.) La probabilidad de que al menos un mecánico esté sin trabajo.
e.) La cantidad promedio de segadoras y podadoras que esperan servicio.
f.) Mida la productividad total del taller.

<u>SOLUCIÓN</u>

λ=60/10=6/hora μ=60/30=2/hora N=18

a.) Cantidad promedio de mecánicos sin trabajo

$$= c - (L_s - L_q)$$
$$= 3 - (9.54 - 6.71) = 0.17$$

b.)

$$P_{18} = 0.0559$$
$$\lambda_{perdida} = 0.0559 * 6 = 0.3354 \; Trabajos / hora$$
$$\# \; de \; Trabajos \; perdidos \; en \; 10 \; horas = 3.354 \; Trabajos$$

c.)

$$P_{n \leqslant 17} = P_o + P_1 + ... + P_{17} = 0.9441$$

d.)

$$P_{n \leqslant 2} = P_o + P_1 + P_2 = 0.10559$$

e.)

$$L_q = 6.1081$$

f.)

$$\frac{L_s - L_q}{\mathrm{c}} = \frac{9.54 - 6.71}{3} = 0.944 \quad (94.4\%)$$

4. Los alumnos de primer ingreso en la U de A se caracterizan, porque tratan de llegar a clase en automóvil (Aunque la mayor parte de ellos viven en el campus, y pueden usar cómodamente el sistema de transporte gratuito de la universidad). Durante el primer par de semanas del semestre otoño, en el campus prevalece una confusión de tráfico porque los alumnos tratan deseperadamente de encontrar cajones de estacionamiento. Con una dedicación extraordinaria, esperan pacientemente en los carriles del estacionamiento a que alguien salga, para poder estacionarse. Imaginemos el siguiente escenario específico: el estacionamiento tiene 30 cajones, pero también pueden caber 10 automóviles en los carriles, y deben esperar que haya disponible uno de los 30 cajones de estacionamiento. Los alumnos de ingreso reciente llegan al estacionamiento siguiendo una distribución Poisson, con 20 por hora de promedio. El tiempo de estacionamiento por automóvil es de 60 minutos en promedio, pero en realidad tienen una distribución exponencial.

a.) ¿Cuál es el porcentaje de alumnos que se salen por no caber en el estacionamiento?
b.) ¿Cuál es la probabilidad de que un automóvil que llegue espere en los carriles?
c.) ¿Cuál es la probabilidad de que un autmóvil de llegue ocupe el único cajón vacío en el estacionamiento?
d.) Calcule la cantidad promedio de cajones ocupados.
e.) Calcule la cantidad promedio de espacios ocupados en los carriles.
f.) Calcule la cantidad de alumnos que no llegan a clase durante un período de 8 horas porque el estacionamiento está totalmente lleno.

SOLUCIÓN

N=40, c=30, λ=20 /hora μ=60/60=1/hora

a.)

$$P_{40} = 0.00014$$

b.)
$$P_{30}+P_{31}+..+P_{39}=P_{n\leqslant 39}-P_{n\leqslant 29}=0.99986-0.91533=0.02453$$

c.)
$$P_{29}=0.01248$$

d.)
$$L_s-L_q=20.043-0.046=20\ cajones \quad \text{(aprox.)}$$

e.)
$$L_q=0.046$$

f.)
Si hay 30 carros ó más en el estacionamiento, el estudiante no podrá entrar a clase. Entonces,

$$P\{\, No\, encontrar\, un\, espacio\, de\ parqueo\}$$
$$=P_{30}+P_{31}+...+P_{40}=1-P_{n\leqslant 29}$$
$$=1-0.97533=0.02467$$
$$El\ número\ de\ estudiantes\ que\ no\ pueden\ encontrar\ \ parqueo\ durante\ 8\ horas\ es\ igual\ a:$$
$$=20*0.02467*8=4\ estudiantes \qquad \text{(aprox.)}$$

5. Verifique Po en el modelo (M/M/c):(DG/N/∞) cuando $\frac{\rho}{c}\neq 1$.

SOLUCIÓN

$$1=P_o\left\{\sum_{n=0}^{c-1}\frac{\rho^n}{n!}+\frac{\rho^c}{c!}\sum_{n=c}^{N}\left(\frac{\rho}{c}\right)^{n-c}\right\}$$
$$=P_o\left\{\sum_{n=0}^{c-1}\frac{\rho^n}{n!}+\frac{\rho^c}{c!}\quad\frac{1-\left(\frac{\rho}{c}\right)^{N-c+1}}{\left(1-\frac{\rho}{c}\right)}\right\}$$
$$P_o=\left\{\sum_{n=0}^{c-1}\frac{\rho^n}{n!}+\frac{\rho^c}{c!}\quad\frac{1-\left(\frac{\rho}{c}\right)^{N-c+1}}{\left(1-\frac{\rho}{c}\right)}\right\}^{-1}$$

6. Demuestre que para el modelo (M/M/c):(DG/N/∞), $\lambda_{ef}=\mu\bar{c}$.

SOLUCIÓN

$$\bar{c}=L_s-L_q$$
$$=\lambda_{ef}\left(W_s-W_q\right)$$
$$=\lambda_{ef}\left(\frac{1}{\mu}\right)$$

7. Verifique la ecuación de Po y Lq para el modelo (M/M/c):(DG/N/∞) cuando $\frac{\rho}{c}=1$.

SOLUCIÓN

$$1=\frac{P_o}{c!}\sum_{n=c}^{N}\frac{\rho^n}{c^{n-c}}+P_o\sum_{n=0}^{c-1}\frac{\rho^n}{n!}$$
$$=\frac{P_o\rho^c}{c!}\sum_{n=c}^{N}\left(\frac{\rho}{c}\right)^n+P_o\sum_{n=0}^{c-1}\frac{\rho^n}{n!}$$
$$=\frac{P_o\rho^c}{c!}(N-c+1)+P_o\sum_{n=0}^{c-1}\frac{\rho^n}{n!}$$
$$Entonces,$$
$$P_o=\left\{\frac{\rho^c}{c!}(N-c+1)+P_o\sum_{n=0}^{c-1}\frac{\rho^n}{n!}\right\}^{-1}$$
$$L_q=\sum_{n=c}^{N}(n-c)P_n$$
$$=\sum_{j=0}^{N-c}j\,P_{j+c}$$
$$=\frac{\rho}{c!}\frac{\rho}{c}\sum_{j=0}^{N-c}j\frac{\rho}{c}^{j-1}P_o$$
$$=\frac{\rho}{c!}\sum_{j=0}^{N-c}j\,P_o\left(porque\,\frac{\rho}{c}=1\right)$$
$$=\frac{\rho}{c!}\frac{(N-c)(N-c+1)}{2}P_o$$
$$=\frac{\rho(N-c)(N-c+1)}{2\,c!}P_o$$

8. Defina, para el modelo (M/M/c):(DG/N/∞) en el que N=c, λ_n y μ_n en términos del modelo generalizado (sección 17.5) y a continuación demuestre que la ecuación de Pn es

$$P_n=\frac{\rho^n}{n!}P_o,\quad n=1,2,\ldots,c$$
$$donde,$$
$$P_o=\left(1+\sum_{n=1}^{c}\frac{\rho^n}{n!}\right)^{-1}$$

SOLUCIÓN

$$\lambda_n = \begin{Bmatrix} \lambda & n=0,1,\dots c-1 \\ 0 & n=c \end{Bmatrix}$$
$$\mu_n = n\mu, \quad n=0,1,\dots,c$$
$$Entonces,$$
$$P_n = \frac{\rho^n}{n!} P_o, n=0,1,\dots,c$$
$$\sum_{n=0}^{c} P_n = \sum_{n=0}^{c} \frac{\rho^n}{n!} P_o = 1$$
$$P_o = \left\{ \sum_{n=0}^{c} \frac{\rho^n}{n!} \right\}^{-1}$$

CONJUNTO DE PROBLEMAS 17.6 H

7. Compruebe la ecuación de Pn para el modelo (M/M/R):(DG/K/K).

SOLUCIÓN

$$P_n = \begin{Bmatrix} \frac{k\lambda}{\mu} \frac{(k-1)\lambda}{2\mu} \dots \frac{(k-n)\lambda}{n\mu} P_o, & 0 \leqslant n \leqslant R \\ \frac{k\lambda}{\mu} \frac{(k-1)\lambda}{2\mu} \dots \frac{(k-R)\lambda}{R\mu} \dots \frac{k-n}{R\mu} P_o & R \leqslant n \leqslant k \end{Bmatrix}$$
$$Entonces,$$
$$P_n = \begin{Bmatrix} \frac{k(k-1)\dots(k-n)}{1\text{x}2\text{x}\dots\text{xn}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_o, & 0 \leqslant n \leqslant R \\ \frac{C_n^k n!}{R! R^{n-R}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_o, & R \leqslant n \leqslant k \end{Bmatrix}$$

8. Demuestre que, en el ejemplo 17.6-8, la frecuencia de descomposturas en el taller se puede calcular con la fórmula $\lambda_{ef} = \mu \bar{R}$, donde $\bar{R}$ es la cantidad promedio de mecánicos ocupados.

SOLUCIÓN

$$\bar{R} = L_s - L_q$$
$$= \lambda_{ef} (W_s - W_q)$$
$$= \lambda_{ef} \left(\frac{1}{\mu}\right)$$
$$con\, lo\, cual,$$
$$\lambda_{ef} = \mu \bar{R}$$

9. Para el ejemplo 17.6-8, compruebe los siguientes resultados para el caso de un solo mecanico (R=1):

$$P_n = \frac{K!\,\rho^n}{(K-n)!} P_o$$

$$P_o = \left(1 + \sum_{n=1}^{R} \frac{K!\,\rho^n}{(K-n)!}\right)^{-1}$$

$$L_s = K - \frac{(1-P_o)}{\rho}$$

SOLUCIÓN

$$P_n = \left\{\begin{matrix} C_n^k \rho^n n!\, P_o, & n=0,1 \\ C_n^k n!\, \rho^n P_o, & n=1,2,\dots K \end{matrix}\right\}$$

$$= \frac{K!}{(K-n)!} \rho^n P_o, n=0,1,2,..,K$$

$$L_s = \sum_{n=0}^{K} n P_n = P_o K! \sum_{n=0}^{K} \frac{n\,\rho^n}{(K-n)!}$$

$$= k - \left(\frac{1-P_o}{\rho}\right)$$